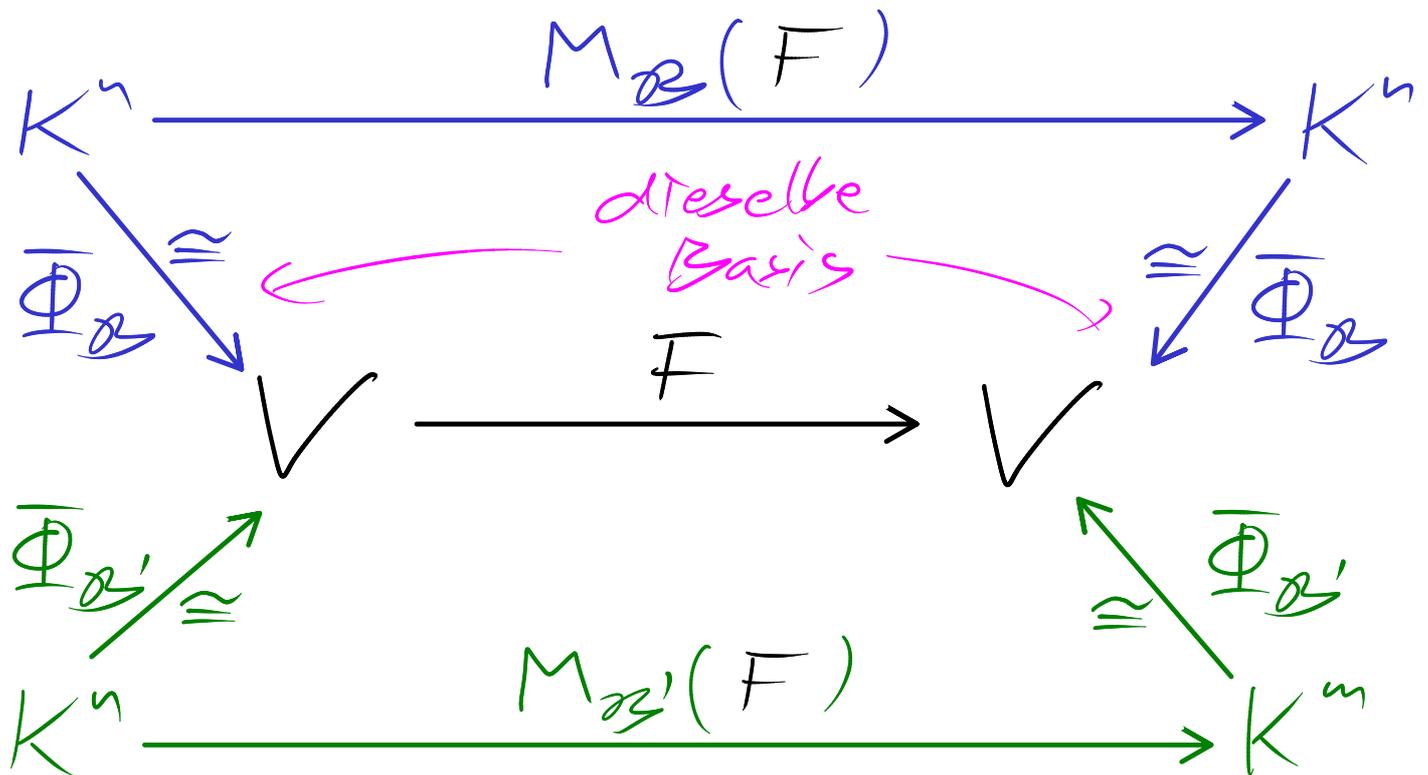


Wie erkennen wir, ob zwei Matrizen dieselbe lineare Abbildung darstellen (bezüglich verschiedener Basen)?

Spezialfall: Endomorphismen

$$M_{\mathcal{B}}(F) := M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)$$

(3.4.4)



Def:
(3.6.7)

$M, M' \in M(n \times n; K)$ sind
äquivalent, wenn es invertierbare

$$S \in M(n \times n; K)$$

$$T \in M(n \times n; K)$$

mit

$$M' = S^{-1} \cdot M \cdot T$$

gibt.

Quadr. $M, M' \in M(n \times n; K)$ sind
ähnlich, wenn es invertierbare

$$T \in M(n \times n; K)$$

mit

$$M' = T^{-1} \cdot M \cdot T$$

gibt.

Notiz: M, M' sind genau dann
(3.6.7) äquivalent, wenn sie
bezüglich verschiedener
Basen dieselbe Abb.
darstellen:

$$\exists F: K^n \rightarrow K^m$$

Basen B, B' von K^n
 $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ von K^m

$$\text{mit } M = M_{\mathcal{C}}^B(F)$$

$$\text{und } M' = M_{\mathcal{C}'}^{B'}(F)$$

M, M' sind genau dann
ähnlich, wenn sie be-
züglicher verschiedener
Basen denselben

Endomorphismus darstellen.

$$\exists F: K^n \longrightarrow K^n$$

Basen B, B' von K^n

mit $M = M_B(F)$

$$M' = M_{B'}(F).$$

Äquivalenz

Ende Vorlesung 17:

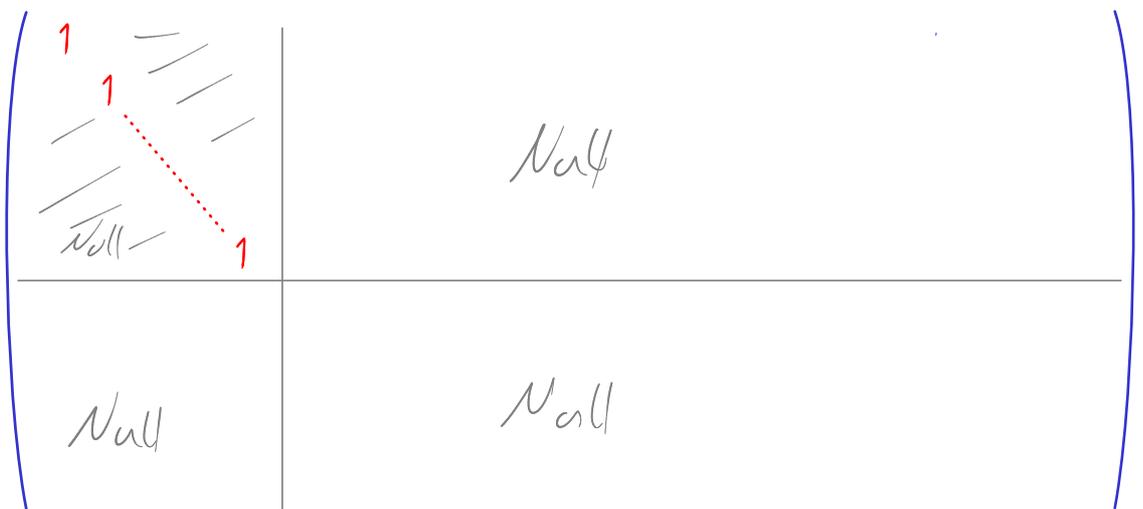
$$\text{Rang}(S^{-1} \cdot M \cdot T) = \text{Rang}(M)$$

↑ invertierbar

→ Äquivalente Matrizen haben denselben Rang.

Satz („Lemma“ in 3.6.7):

- (1) Zwei $m \times n$ -Matrizen sind genau dann äquivalent, wenn sie denselben Rang haben.
- (2) Jede Matrix ist äquivalent zu einer Matrix in Normalform



Ähnlichkeit viel ~~schwieriger~~
interessanter

? Existieren andere Invarianten
außer Rang, die weiterhelfen?

$$\text{Rang}(M) \in \mathbb{N}$$

$$\text{Spur}(M) \in K$$

$$\det(M) \in K$$

$$\chi_M \in K[t]$$

"charakteristisches
Polynom"

Eigenwerte / Dimension von
Eigenräumen...

stimmen
für
ähnliche
Matrizen
überein

Def: Spur von $A = (a_{ij})_{i,j} \in M(n \times n; K)$
(5.2.2)

$$\text{tr}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

↑
"trace"

Def: Determinante
von $A = (a_{ij})_{i,j} \in M(n \times n; K)$:

$$\det(A) := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sign}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}$$

(Leibnizformel, 4.2.5)

Vorlesung 6:

Def.: Die symmetrische Gruppe $(S(X), \circ)$ einer Menge X ist die Menge

$$S(X) := \{X \xrightarrow{f} X \mid f \text{ bijektiv}\}$$

zusammen mit der Komposition \circ .

$$S_n := S(\{1, \dots, n\})$$

Elemente von S_n sind also bijektive Abbildungen $\sigma: \{1, \dots, n\} \xrightarrow{\cong} \{1, \dots, n\}$,
kurz: n -stellige Permutationen

Notation:
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Def.: Fehlstand von $\sigma \in S_n$:

$$\{i, j\} \subseteq \{1, \dots, n\} \text{ mit} \\ i < j \text{ und } \sigma(i) > \sigma(j)$$

Signum von $\sigma \in \mathfrak{S}_n$:

$$\text{sign}(\sigma) := (-1)^{\text{Anzahl der Fehlstände von } \sigma \in \{\pm 1\}}$$

Satz: $\text{sign}: \mathfrak{S}_n \longrightarrow (\{\pm 1\}, \cdot)$

ist ein Gruppen-
homomorphismus

$$\text{sign}(\sigma \circ \tau) = \text{sign}(\sigma) \cdot \text{sign}(\tau)$$